الإحتمال

تعاريف

* **التجربة العشوائية** : هى تجربة نستطيع معرفة جميع نواتجها الممكنة قبل إجرائها ، ولكن لا يمكن تحديد الناتج الذى سيحدث فعلاً
* **فضاء العينة** : هو مجموعة جميع النواتج الممكنة للتجربة العشوائية و عدد عناصرها هو ن (ف)
* **الحدث** : هو مجموعة جزئية من فضاء العينة فإذا كان : أ حدث فى ف فإن : أ ⊂ ف و عدد عناصره هو : ن (أ) أى عدد فرص وقوع الحدث أ
* **الحدث المستحيل " ∅ "** = : هو الحدث الذى لا يمكن وقوعه
* **الحدث المؤكد** : هو الحدث الذى له كل النواتج الممكنة
* **الحدث البسيط** : هو حدث يتكون من عنصر واحد و يسمى حدث أولى
* **الحدث المركب** : هو حدث يتكون من أكثر من عنصر و يسمى حدث غير بسيط
* **الحدثان المتنافيان** : هما حدثان لا يمكن وقوعهما معاً أى أن : هما حدثان تقاطعهما = ∅

ملاحظة : الأحداث البسيطة فى فضاء العينة تكون متنافية مثنى مثنى

مسلمات الإحتمال

إذا كان : أ حدثاً من أحداث فضاء العينة لتجربة عشوائية ما أى أ ⊂ ف فإن :

(١) إحتمال الحدث أ " ل (أ) " هو عدد حقيقى يحقق ما يأتى : ل (أ) = ن (أ) / ن (ف)

حيث : ٠ ≤ ل (أ) ≤ ١

أى أن : ل (أ) ∈ [٠ ، ١]

(٢) ل (ف) = ١

أى أن : إحتمال الحث المؤكد = ١

(٣) ل (∅) = صفر

أى أن : إحتمال الحدث المستحيل = صفر

(٤) إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة فإن : ل (أ ∩ ب) = صفر

، ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب)

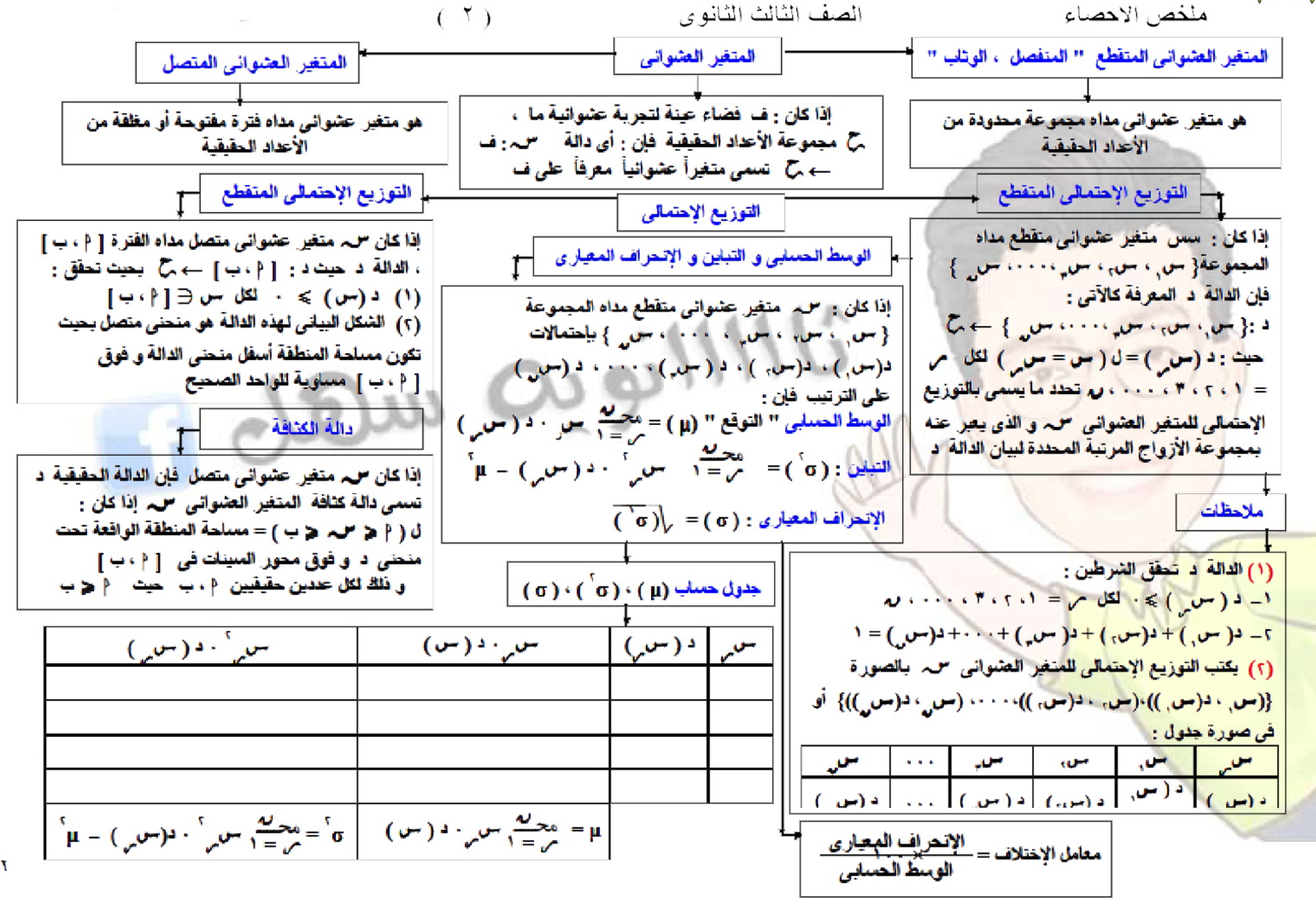
(٥) إذا كان : ف = { أ١ ، أ٢ ، أ٣ ، … ، أن } فإن : ل (أ١) + ل (أ٢) + ل (أ٣) + … ل (أن) = ١

(٦) إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة ، أ ⊂ ب فإن : ل (أ ∩ ب) = ل (أ)

، ل (أ ∪ ب) = ل (ب)

العمليات على الأحداث

الصورة الرمزية	الصورة اللفظية
ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)	إحتمال وقوع الحدث أ أو الحدث ب إحتمال وقوع كلا الحدثين إحتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل
ل (أ ∩ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∪ ب)	إحتمال وقوع أ و ب إحتمال وقوعهما معا
ل (أ′) = ١ − ل (أ)	إحتمال عدم وقوع أ
ل (أ − ب) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب) ل (أ ∩ ب′) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب)	إحتمال وقوع أ فقط إحتمال وقوع أ و عدم وقوع ب
ل (ب − أ) = ل (ب) − ل (أ ∩ ب) ل (أ′ ∩ ب) = ل (ب) − ل (أ ∩ ب)	إحتمال وقوع ب فقط إحتمال وقوع ب و عدم وقوع أ
ل (أ ∪ ب′) = ١ − ل (ب − أ) ل (ب − أ)′ = ١ − ل (ب − أ)	إحتمال عدم وقوع ب فقط إحتمال وقوع أ أو عدم وقوع ب
ل (أ′ ∪ ب) = ١ − ل (أ − ب) ل (أ − ب)′ = ١ − ل (أ − ب)	إحتمال عدم وقوع أ فقط إحتمال وقوع ب أو عدم وقوع أ
ل (أ′ ∪ ب′) = ١ − ل (أ ∩ ب) ل (أ ∩ ب)′ = ١ − ل (أ ∩ ب)	إحتمال وقوع حدث واحد على الأكثر إحتمال عدم وقوع أ و ب معا
ل (أ′ ∩ ب′) = ١ − ل (أ ∪ ب) ل (أ ∪ ب)′ = ١ − ل (أ ∪ ب)	إحتمال عدم وقوع أحدهما على الأقل إحتمال عدم وقوع أ أو ب
ل [(أ − ب) ∪ (ب − أ)] = ل (أ) + ل (ب) − ٢ ل (أ ∩ ب)	إحتمال وقوع أحدهما فقط إحتمال وقوع أ أو ب فقط إحتمال وقوع أحدهما دون الآخر



المتغير العشوائى

إذا كان : ف فضاء عينة لتجربة عشوائية ما ، ح مجموعة الأعداد الحقيقية فإن : أى دالة س : ف ← ح تسمى متغيراً عشوائياً معرفاً على ف

المتغير العشوائى المتقطع " المنفصل ، الوثاب "

هو متغير عشوائى مداه مجموعة محدودة من الأعداد الحقيقية

المتغير العشوائى المتصل

هو متغير عشوائى مداه فترة مفتوحة أو مغلقة من الأعداد الحقيقية

التوزيع الإحتمالى

التوزيع الإحتمالى المتقطع

إذا كان : س متغير عشوائى متقطع مداه المجموعة { $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، ..... $س_ن$ } فإن الدالة د المعرفة كالآتى :

د : { $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، ..... $س_ن$ } ← ح

حيث : د ($س_ر$) = ل (س = $س_ر$) لكل ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ..... ن تحدد ما يسمى بالتوزيع الإحتمالى للمتغير العشوائى س و الذى يعبر عنه بمجموعة الأزواج المرتبة المحددة لبيان الدالة د

ملاحظات

(١) الدالة د تحقق الشرطين :

١ـ د ($س_ر$) ≥ ٠ لكل ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ..... ن

٢ـ د($س_1$) + د($س_2$) + د($س_3$) + ...+ د($س_ن$) = ١

(٢) يكتب التوزيع الإحتمالى للمتغير العشوائى س بالصورة

{($س_1$ ، د($س_1$))،($س_2$ ، د($س_2$))، ..... ($س_ن$ ، د($س_ن$))} أو فى صورة جدول :

س	$س_1$	$س_2$	$س_3$	...	$س_ن$
د (س)	د ($س_1$)	د ($س_2$)	د ($س_3$)	...	د ($س_ن$)

الوسط الحسابى و التباين و الإنحراف المعيارى

إذا كان : س متغير عشوائى متقطع مداه المجموعة { $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، ..... ، $س_ن$ } بإحتمالات د($س_1$) ، د($س_2$) ، د($س_3$) ، ..... د($س_ن$) على الترتيب فإن :

الوسط الحسابى " التوقع " (μ) = $\sum_{ر=1}^{ن} س_ر \cdot د(س_ر)$

التباين : (σ^2) = $\sum_{ر=1}^{ن} س_ر^2 \cdot د(س_ر) - \mu^2$

الإنحراف المعيارى : (σ) = $\sqrt{(\sigma^2)}$

جدول حساب (μ) ، (σ^2) ، (σ)

$س_ر$	د ($س_ر$)	$س_ر$. د ($س_ر$)	$س_ر^2$. د ($س_ر$)
		$\mu = \sum_{ر=1}^{ن} س_ر \cdot د(س_ر)$	$\sigma^2 = \sum_{ر=1}^{ن} س_ر^2 \cdot د(س_ر) - \mu^2$

معامل الإختلاف = $\frac{\text{الإنحراف المعيارى}}{\text{الوسط الحسابى}}$

التوزيع الإحتمالى المتقطع

إذا كان س متغير عشوائى متصل مداه الفترة [ا ، ب] ، الدالة د حيث د : [ا ، ب] ← ح بحيث تحقق :

(١) د (س) ≥ ٠ لكل س ∈ [ا ، ب]

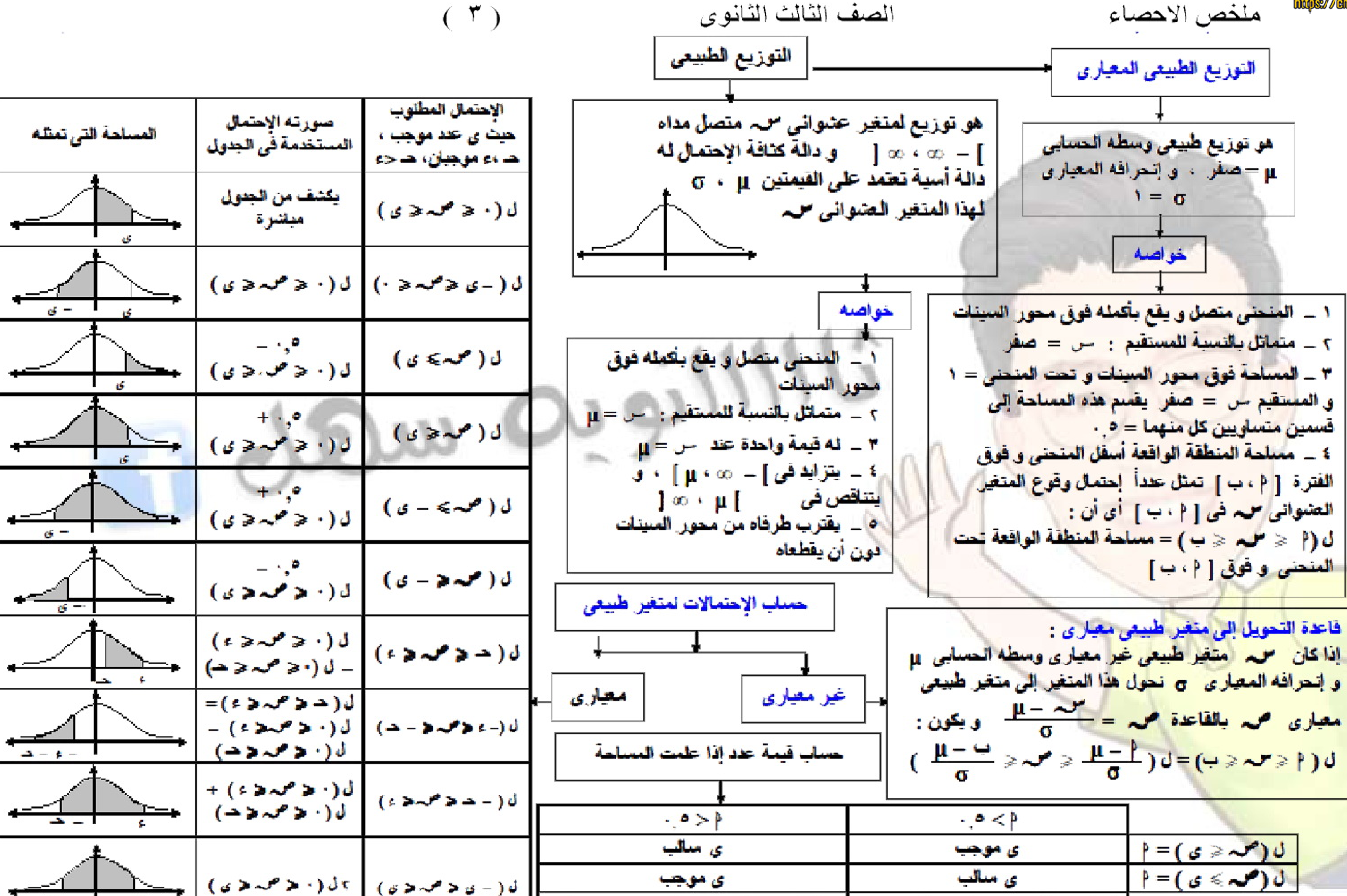
(٢) الشكل البيانى لهذه الدالة هو منحنى متصل بحيث تكون مساحة المنطقة أسفل منحنى الدالة و فوق [ا ، ب] مساوية للواحد الصحيح

دالة الكثافة

إذا كان س متغير عشوائى متصل فإن الدالة الحقيقية د تسمى دالة كثافة المتغير العشوائى س إذا كان :

ل (ا ≤ س ≤ ب) = مساحة المنطقة الواقعة تحت منحنى د و فوق محور السينات فى [ا ، ب]

و ذلك لكل عددين حقيقيين ا ، ب حيث ا ≤ ب



التوزيع الطبيعى المعيارى

هو توزيع طبيعى وسطه الحسابى μ = صفر ، و إنحرافه المعيارى σ = ١

خواصه

١ ـ المنحنى متصل و يقع بأكمله فوق محور السينات

٢ ـ متماثل بالنسبة للمستقيم : س = صفر

٣ ـ المساحة فوق محور السينات و تحت المنحنى = ١ و المستقيم س = صفر يقسم هذه المساحة إلى قسمين متساويين كل منهما = ٠,٥

٤ ـ مساحة المنطقة الواقعة أسفل المنحنى و فوق الفترة [أ ، ب] تمثل عدداً إحتمال وقوع المتغير العشوائى س فى [أ ، ب] أى أن :
ل (أ ≥ س ≥ ب) = مساحة المنطقة الواقعة تحت المنحنى و فوق [أ ، ب]

التوزيع الطبيعى

هو توزيع لمتغير عشوائى س متصل مداه] − ∞ ، ∞ [و دالة كثافة الإحتمال له دالة أسية تعتمد على القيمتين μ ، σ لهذا المتغير العشوائى س

خواصه

١ ـ المنحنى متصل و يقع بأكمله فوق محور السينات

٢ ـ متماثل بالنسبة للمستقيم : س = μ

٣ ـ له قيمة واحدة عند س = μ

٤ ـ يتزايد فى] − ∞ ، μ] ، و يتناقص فى [μ ، ∞ [

٥ ـ يقترب طرفاه من محور السينات دون أن يقطعاه

قاعدة التحويل إلى متغير طبيعى معيارى :

إذا كان س متغير طبيعى غير معيارى وسطه الحسابى μ و إنحرافه المعيارى σ تحول هذا المتغير إلى متغير طبيعى معيارى ص بالقاعدة ص = $\frac{س - \mu}{\sigma}$ و يكون :

ل (أ ≥ س ≥ ب) = ل ($\frac{أ - \mu}{\sigma}$ ≥ ص ≥ $\frac{ب - \mu}{\sigma}$)

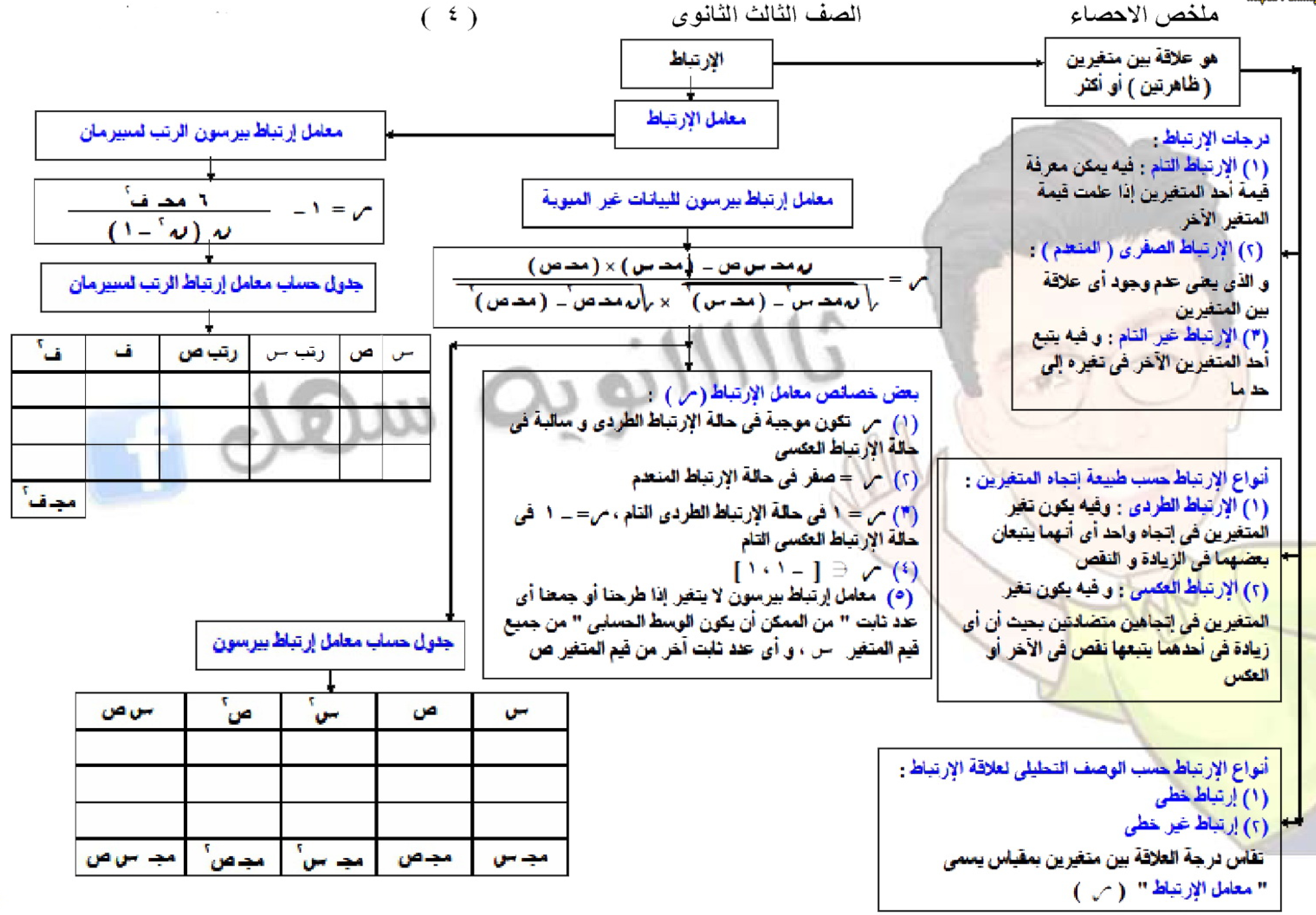
حساب الإحتمالات لمتغير طبيعى

- غير معيارى
- معيارى

حساب قيمة عدد إذا علمت المساحة

	أ > ٠,٥	أ < ٠,٥
ل (ص ≥ ى) = أ	ى موجب	ى سالب
ل (ص ≤ ى) = أ	ى سالب	ى موجب
	ل (٠ ≥ ص ≥ ى) = أ − ٠,٥	ل (٠ ≥ ص ≥ ى) = ٠,٥ − أ
	نبحث فى الجدول عن قيمة ى التى تناظر المساحة الناتجة	

الإحتمال المطلوب حيث ى عدد موجب ، حـ ، ء موجبان، حـ < ء	صورته الإحتمال المستخدمة فى الجدول	المساحة التى تمثله
ل (٠ ≥ ص ≥ ى)	يكشف من الجدول مباشرة	ى
ل (− ى ≥ ص ≥ ٠)	ل (٠ ≥ ص ≥ ى)	− ى ، ى
ل (ص ≤ ى)	٠,٥ − ل (٠ ≥ ص ≥ ى)	ى
ل (ص ≥ ى)	٠,٥ + ل (٠ ≥ ص ≥ ى)	ى
ل (ص ≤ − ى)	٠,٥ + ل (٠ ≥ ص ≥ ى)	− ى
ل (ص ≥ − ى)	٠,٥ − ل (٠ ≥ ص ≥ ى)	− ى
ل (حـ ≥ ص ≥ ء)	ل (٠ ≥ ص ≥ ء) − ل (٠ ≥ ص ≥ حـ)	حـ ، ء
ل (− ء ≥ ص ≥ − حـ)	ل (حـ ≥ ص ≥ ء) = ل (٠ ≥ ص ≥ ء) − ل (٠ ≥ ص ≥ حـ)	− ء ، − حـ
ل (− حـ ≥ ص ≥ ء)	ل (٠ ≥ ص ≥ ء) + ل (٠ ≥ ص ≥ حـ)	− حـ ، ء
ل (− ى ≥ ص ≥ ى)	٢ ل (٠ ≥ ص ≥ ى)	− ى ، ى



الإرتباط

هو علاقة بين متغيرين (ظاهرتين) أو أكثر

درجات الإرتباط :

(١) الإرتباط التام : فيه يمكن معرفة قيمة أحد المتغيرين إذا علمت قيمة المتغير الآخر

(٢) الإرتباط الصفرى (المنعدم) : و الذى يعنى عدم وجود أى علاقة بين المتغيرين

(٣) الإرتباط غير التام : و فيه يتبع أحد المتغيرين الآخر فى تغيره إلى حد ما

أنواع الإرتباط حسب طبيعة إتجاه المتغيرين :

(١) الإرتباط الطردى : وفيه يكون تغير المتغيرين فى إتجاه واحد أى أنهما يتبعان بعضهما فى الزيادة و النقص

(٢) الإرتباط العكسى : و فيه يكون تغير المتغيرين فى إتجاهين متضادتين بحيث أن أى زيادة فى أحدهما يتبعها نقص فى الآخر أو العكس

أنواع الإرتباط حسب الوصف التحليلى لعلاقة الإرتباط :

(١) إرتباط خطى

(٢) إرتباط غير خطى

تقاس درجة العلاقة بين متغيرين بمقياس يسمى " معامل الإرتباط " (ر)

معامل الإرتباط

معامل إرتباط بيرسون للبيانات غير المبوبة

$$ر = \frac{ن مجـ س ص - (مجـ س) \times (مجـ ص)}{\sqrt{ن مجـ س^2 - (مجـ س)^2} \times \sqrt{ن مجـ ص^2 - (مجـ ص)^2}}$$

بعض خصائص معامل الإرتباط (ر) :

(١) ر تكون موجبة فى حالة الإرتباط الطردى و سالبة فى حالة الإرتباط العكسى

(٢) ر = صفر فى حالة الإرتباط المنعدم

(٣) ر = ١ فى حالة الإرتباط الطردى التام ، ر = ـ ١ فى حالة الإرتباط العكسى التام

(٤) ر ∋ [ـ ١ ، ١]

(٥) معامل إرتباط بيرسون لا يتغير إذا طرحنا أو جمعنا أى عدد ثابت " من الممكن أن يكون الوسط الحسابى " من جميع قيم المتغير س ، و أى عدد ثابت آخر من قيم المتغير ص

جدول حساب معامل إرتباط بيرسون

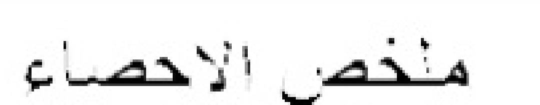
س	ص	$س^2$	$ص^2$	س ص
مجـ س	مجـ ص	مجـ $س^2$	مجـ $ص^2$	مجـ س ص

معامل إرتباط بيرسون الرتب لسبيرمان

$$ر = ١ - \frac{٦ مجـ ف^2}{ن (ن^2 - ١)}$$

جدول حساب معامل إرتباط الرتب لسبيرمان

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	$ف^2$
					مجـ $ف^2$



الإنحدار

شكل الإنحدار لمتغيرين

عند دراسة العلاقة بين المتغيرين س ، ص فإنه يمكن تمثيل الأزواج المرتبة الممثلة لهذه العلاقة بنقط فى المستوى و يسمى الشكل الناتج " شكل الإنتشار " للمتغيرين س ، ص و قد يأخذ هذا الشكل صوراً مختلفة " مستقيم ،أو منحنى "

خط الإنحدار

إذا كانت العلاقة بين المتغيرين س ، ص خطية فإنه يعبر عنها بخط مستقيم يسمى خط الإنحدار

طرق إيجاد معادلة خط الإنحدار

المربعات الصغرى

معادلة إنحدار ص على س هى : ص = أ س + ب

" حيث أ معامل إنحدار ص على س "

$$أ = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\text{ن مجـ س}^2 - (\text{مجـ س})^2}$$

$$، ب = \frac{\text{مجـ ص} - \text{أ مجـ س}}{\text{ن}}$$

معادلة إنحدار س على ص ى : س = حـ ص + ء

" حيث حـ معامل إنحدار س على ص "

$$حـ = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\text{ن مجـ ص}^2 - (\text{مجـ ص})^2}$$

$$، ء = \frac{\text{مجـ س} - \text{حـ مجـ ص}}{\text{ن}}$$

جدول حساب أ ، ب ، حـ ، ء

هو نفس جدول حساب معامل إرتباط بيرسون

ملاحظة: يحذف العمود غير المناسب من الجدول

الإنحرافات

تعتمد على تصغير الأعداد الحسابية المستخدمة لحساب أ ، ب ، حـ ، ء و ذلك بوضع :

سَ = س − و ، صَ = ص − هـ

حيث : و ، هـ أى عددين ثابتين يتم إختيارهما حسب ظروف المسألة تم توجد معادلة خط الإنحدار المطلوبة بدلالة سَ ، صَ و بالتعويض عنهما نحصل على المعادلة المطلوبة بدلالة س ، ص و تكون قيمة أ هى قيمة معامل إنحدار صَ على سَ و فى نفس الوقت هى معامل إنحدار ص على س و كذلك قيمة حـ هى معامل س على ص

الجدول المستخدم

س	ص	سَ = س − و	صَ = ص − هـ	$سَ^2$	$صَ^2$	سَ صَ
		مجـ سَ	مجـ صَ	مجـ $سَ^2$	مجـ $صَ^2$	مجـ سَ صَ

ملاحظة: يحذف العمود غير المناسب من الجدول

العلاقة بين معامل الإنحدار و معامل الإرتباط

$ر^2 = أ \times حـ$ حيث :

ر يأخذ نفس لإشارة كل من أ ، حـ